VII POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH

„W POGONI ZA INDEKSEM"

ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE – ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

rok szkolny 2015/2016

3. Pierwszy piechur w ciągu minuty przebywa 1/a drogi, drugi 1/b drogi.
Obaj piechurzy przebywają 1/a+1/b czyli (b+a)/ab

Odp. Piechurzy spotkają się po $1 : \frac{b+a}{ab} = \frac{ab}{b+a}$ minut

4. $(5a+1)^4 - (5b+4)^4 = \left[(5a+1)^2 - (5b+4)^2\right]\left[(5a+1)^2 + (5b+4)^2\right]$
$=5(5a^2+2a-5b^2-20b-3)((5a+1)^2+(5b+4)^2)$
Odp. Jeden z czynników iloczynu równy jest 5, stąd iloczyn jest wielokrotnością 5.

5. Odp. 1

6. x-liczba dziewcząt na początku, y- liczba chłopców na początku
Otrzymujemy równania: y=2(x-15)
x-15=5(y-45)
Odp x=40

7. x – liczba rzędów po y krzeseł czyli : xy=320, gdy dodamy do każdego rzędu po 4 krzesła (łącznie 4x krzeseł) i jeszcze jeden rząd (tzn. y+4 krzeseł) ilość miejsc wzrośnie o 100, a zatem 4x + y + 4 = 100.
Wnioskujemy, że y jest podzielne przez 4. Podstawiamy y= 4z otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x \cdot z = 80 \\ x + z = 24 \end{cases}$$ po rozwiązaniu otrzymujemy

x= 4 i z = 20 lub x = 20 i z = 4.

Odp. W Sali mamy 4 rzędy po 80 krzeseł, bądź 20 rzędów po 16 krzeseł .

8. $999\,999\,999^2 = (10^9 - 1)^2 = 10^{18} - 2 * 10^9 + 1$
Odp. jest 8 dziewiątek.

9. k- kwota za którą handlarz zakupił towar, (k ≠ 0) bo w przeciwnym razie nie zmieniłaby się cena zakupu, a więc także nie zwiększyłby się zysk procentowy
s - kwota za którą handlarz sprzedał towar
Czysty zysk ze sprzedaż wynosi p% ceny hurtowej, więc: $s = k + p\%\ k$;
$s = k\ (1+ p\%)$
Gdyby cena zakupu była o 8% mniejsza to zysk wyniósłby (p+10)% , a więc:
$s = 0{,}92k + (p + 10\%)\ 0.92k$; $s = 0{,}92k\ (1 + p + 10\%)$
W obu przypadkach cena sprzedaży jest ta sama, więc:
$k\ (1+ p/\ 100) = 0{,}92k\ (1 + p + 10\ /100)$
Odp. p = 15.

VII POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH

„W POGONI ZA INDEKSEM"

ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE – ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

rok szkolny 2015/2016

10.

x - szukana masa deski
Pływak zanurzony z deską w wodzie nie utonie, jeśli średnia gęstość jego ciała i deski będzie nie większa niż gęstość wody.
objętość pływaka = $^{45}/_{1,1}$
objętość deski = $^{x}/_{0,15}$
gęstość ciała pływaka i deski obliczymy jako iloraz ich łącznej masy i łącznej objętości, stąd: $1 \geq {}^{(45+x)}/_{(45/1,1+x/0,15)}$
Po przekształceniach dostajemy $x \geq 0{,}722$ kg
Odp. Masa deski pływackiej musi wynosić co najmniej 0,722 kg.

Ktoś dociekliwy mógłby spytać, co by było, gdyby to nie była deska pływacka, tylko deska surfingowa. W takim przypadku pływak nie jest zanurzony w wodzie i przy obliczaniu średniej gęstości nie bierzemy pod uwagę jego objętości. Dostajemy nierówność $1 \geq {}^{(45+x)}/_{(x/0,15)}$, która po rozwiązaniu daje $x \geq 7{,}941$ kg.

11.

x- ilość roztworu o stężeniu p%
y- ilość odparowanej wody
z układu równań
p%x + 0,4 = 20%(x+0,4)
p%x = 20%(x-y)
obliczamy y = 1,6
Odp. Należy odprowadź 1,6 kg wody.

12.

x- ilość rozlanej wody
1/3 x – ilość wody wlanej do I naczynia
3/5(x- 1/3x) = 3/5 * 2/3x= 2/5 x - ilość wody wlanej do II naczynia
2/3x – 2/5 x= 10/15x – 6/15x= 4/15x –tyle wody zostało
5/8* 4/15x= 1/6x - ilość wody wlanej do III naczynia
1/3x + 2/5x + 1/6x + 6= x
Stąd x= 60 kg
Odp. Rozlano 60 kg wody.

13.

V= 20*10*100= 20000dm^3
Jeżeli wlano 5000 dm^3 mleka, to pozostało jeszcze 15000 dm^3 wolnego miejsca.
Zatem wlano 15000 dm^3 mleka o zawartości 4,2% tłuszczu.
3,4%*5000 + 4,2% * 15000 = p% * 20000
Stąd p= 4 %
Odp. Mleko w zbiorniku zawiera 4% tłuszczu.

14. -9

15. Ponieważ $\sqrt[3]{abc} = 4$ i $\sqrt[4]{abcd} = 2\sqrt{10}$, więc $abc = 4^3$ oraz $abcd = 2^4 \cdot 10^2$
czyli $4^3 d = 2^4 \cdot 10^2$ stąd, dzieląc stronami otrzymujemy $d = 10^2 : 4 = 25$

16. Oznaczmy przez x po ilu latach ojciec będzie n razy starszy od syna.
Równanie: $40 + x = n(10 + x)$.
Stąd $x = \dfrac{40-10n}{n-1}$ czyli dla n = 2, to x = 20 oraz dla n = 3, to x = 5, dla n = 4 mamy x = 0

Ojciec będzie za 5 lat 3 razy starszy od syna, za 20 lat będzie 2 razy starszy od syna. Obecnie jest 4 razy starszy od syna. (Dla n = 6 , x = – 4 co oznacza, że ojciec 4 lata temu był 6 razy starszy od syna itd.).

17.

x- cyfra dziesiątek
y- cyfra jedności
Z układu równań wyznaczamy
$10x + y = 6(x + y) + 3$
$10x + y = 5(x+y+2) + 5$
$x= 7$ $y= 5$ Odp. Szukana liczba 57

18.

x- liczba osób w jednym autobusie
6x- liczba wszystkich kibiców, którzy odjechali autobusem
115%*6x- liczba kibiców, którzy poszli pieszo
$6x>150$
$6x+115\%6x\leq 400$
Stąd $x>25$ ale ≤ 31
Sprawdzając dla x= 26,27,28,29,30,31 otrzymujemy tylko jedną liczbę, która spełnia warunki. Jest nią x=30. Wówczas 6x= 180, 115%z 6x= 207
Odp. Było 387 kibiców.

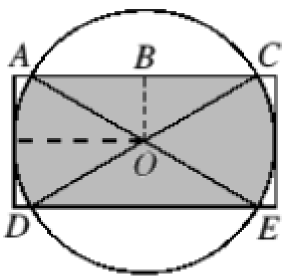
19.

x- wielkość zamówienia
600:30 =20 – limit dzienny
600 = 30% x
Stąd x= 2000
2000- 600 = 1400 – tyle pozostało do wykonania
1400:56= 25- tyle należy wykonać dziennie
25-20= 5
5 ile to procent 20?
5/20 *100% = 25%
Odp. Dzienną produkcję należy zwiększyć o 25%.

20.

Przekątne prostokąta mają jednakowe długości (uzasadnienie np. z przystawania trójkątów; jeśli uczeń tego nie pokaże od razu, powinien to zrobić na koniec na prośbę jury, jeśli nie potrafi, odejmujemy 4 pkt). Niech boki prostokąta mają długości *x* i *y*. Wtedy xy=120 oraz x+y=23. Z twierdzenia Pitagorasa kwadrat długość przekątnej to $x2+y2 = (x+y)2 – 2xy$, czyli 289. Długość przekątnej to 289 = 17.

21.



Średnica koła ma długość 12, więc promień 6. Odległość środka koła od dłuższego boku prostokąta wynosi 3. Średnice *AE* i *CD* dzielą cześć wspólną figur na dwa wycinki koła i dwa trójkąty równoramienne. Kąt *AOB* ma miarę 60 (połówka trójkąta równobocznego, AO=6, $OB.$=3), zatem $|AB|=3\sqrt{3}$ i pole obu trójkątów to. $2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{3}=18\sqrt{3}$ Miara kata AOD to 60 (kąt przyległy do 120), więc oba wycinki stanowią 1/3 koła i mają łącznie pole 1/3 $\pi\cdot 6^2=12\pi$.

Zacieniowane pole to $12\pi+18\sqrt{3}$

22. -----

23. $\frac{6}{5}$

24. Niech h oznacza wysokość trapezu ABCD. Jest ona równa wysokości trójkąta ACE.

$$P_{ABCD}=\frac{|AD|+|BC|}{2}\cdot h$$

$$P_{AEC}=\frac{|AE|}{2}\cdot h$$

Ponieważ $BD \parallel CE$ więc $|DE|=|BC|$, skąd

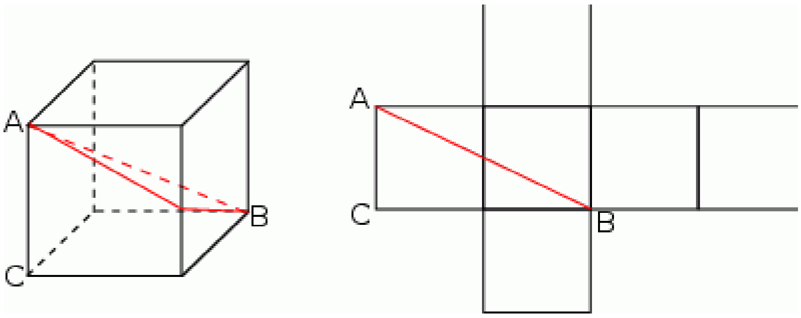
$$P_{AEC}=\frac{|AE|}{2}\cdot h=\frac{|AD|+|DE|}{2}\cdot h=\frac{|AD|+|BC|}{2}\cdot h=P_{ABCD}$$

25. 75^{o}

26. 2a+b

27. 30

28. Rysujemy siatkę.



Z rysunku widać, że długość drogi możemy obliczyć z trójkąta prostokątnego ABC.

$$AB=\sqrt{AC^2+CB^2}=\sqrt{5+4\cdot 5}=5.$$

29. $41\frac{1}{7}$m^3

30. 133cm^2 lub 171cm^2

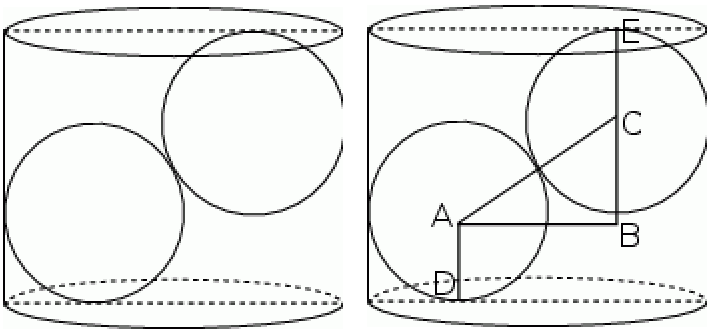
31. V=125cm^3

32. r≈ 8,6cm czyli 2r≈ 17,2cm

33. Ciężar skrzyń jest taki sam.

34. 400 cm^3 soku

35.



$$AB = 2R - 2r = 16 - 10 = 6$$
$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

36. 45^0