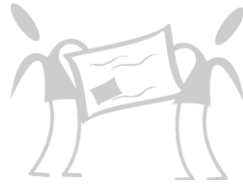


VI POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH
„W POGONI ZA INDEKSEM”
ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE – ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

rok szkolny 2014/2015



1. Zauważamy, że $\frac{n+4}{n+3} = \frac{(n+3)+1}{n+3} = 1 + \frac{1}{n+3}$ więc liczba ta będzie liczbą całkowitą tylko wtedy, gdy $n+3$ będzie dzielnikiem liczby 1, czyli $n = -2$ oraz $n = -4$.
2. Ponieważ $4^n - 1 = 2^{2n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$, więc dana liczba będzie liczbą pierwszą tylko wtedy, gdy liczby $2^n - 1 = 12^n + 1$, oraz dla dowolnych liczb całkowitych n liczby $2^n - 1$ i $2^n + 1$ są dodatnie i jednocześnie, czyli $n = 1$. Dla $n > 1$ dana liczba jest liczbą złożoną.
3. Jeżeli w turnieju wzięło udział n szachistów, to każdy z nich rozegrał $n-1$ partii. Zatem liczba wszystkich rozegranych partii w tym turnieju była równa $\frac{n(n-1)}{2}$. Łatwo zauważyć, że

$$\frac{n(n-1)}{2} \neq 12, \quad \frac{n(n-1)}{2} \neq 20, \quad \frac{n(n-1)}{2} = 15, \quad \frac{n(n-1)}{2} \neq 36$$

4. Celina ma 8 lat
5. Kluczem do rozwiązania jest wyznaczenie reszty z dzielenia przez 7 (mod 7) numeru danego dnia w roku nieprzestępnym.
6. Dwa rozwiązania
7. Oznaczam wybrane przez Joasię liczby a i b oraz przyjmuję, że $a \leq b$. Ponieważ $\text{NWD} = 21$, więc $a = 21x$ i $b = 21y$, dla pewnych względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych x i y oraz $x \leq y$.

$\text{NWW} = 210$ więc $21xy = 210$ a stąd $xy = 10$

$$(x, y) = (1, 10) \quad \text{lub} \quad (x, y) = (2, 5)$$

$$\text{Więc } (a, b) = (21, 210), \quad \text{lub} \quad (a, b) = (42, 105)$$

8. Jeśli pierwszy kran napełnia basen w ciągu 2 godzin, to w ciągu godziny napełni $\frac{1}{2}$ tego basenu. Analogicznie, drugi kran w ciągu godziny napełni $\frac{1}{4}$ basenu a przez otwór spustowy wypłynie $\frac{1}{3}$ ilości wody będącej w basenie.

Zakładamy, że po otwarciu obu kranów i nie zamknięciu otworu spustowego basen napełnia się w ciągu x godzin.

Rozwiązujemy równanie: $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{12}$$

$$x = \frac{12}{5}$$

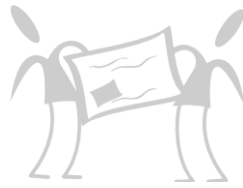
$$x = 2 + \frac{24}{60}$$

czyli basen napełni się w ciągu 2 godzin i 24 minut

9. $n = 27$
10. Po I myciu zostaje 90% x

Po II myciu zostaje 90% * 90% $x = 0,9^2 * x = 0,81 x$ (za dużo)

VI POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH
„W POGONI ZA INDEKSEM”
ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE – ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI



rok szkolny 2014/2015

Po III myciu zostaje $0,9^3x = 0,729x$

Po IV myciu $0,9^4x = 0,6561x$

Itd.,

Odp. Po 7 myciu

11. Po przejściu przez jedną płytkę natężenie światła wynosi 80% x , a po przejściu przez drugą 80% z 80% $x = 0,64x$

Odp. Natężenie światła spadło o 36 %

12. Niech x oznacza szukaną powierzchnię pola w hektarach. Franciszek zabronował:

- w poniedziałek $0,5x+4$,
- we wtorek $(x-0,5x-4)/3$,
- w środę 8.

Rozwiązując równanie $x = (0,5x+4) + (0,5x-4)/3 + 8$, otrzymamy $x=32$ ha

13. Szybkość zjadania balotu siana przez pierwszą kozę to 1 balot/dzień, a przez drugą kozę to 0,5 balot/dzień. Ich łączna szybkość to 1,5 balot/dzień, stąd czas jaki im będzie potrzebny na zjedzenie 1 balotu siana to $1/1,5 = 2/3$ dnia = 16 godzin. Łączna szybkość zjadania pozostałych kóz to $1/3 + 1/4 + \dots + 1/10 = 3601/2520$ balot/dzień. Czyli jeden balot siana będą jadły $2520/3601$ dnia = 16 godzin 47 minut $43^{737}/3601$ sekundy.

14. x - ilość wody

y - ilość substancji rozpuszczonej

$$x = 20\% (x + y)$$

$$x + 10 = 25\% (x + y + 10)$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymamy

$$X = 30$$

$$Y = 120$$

Odp. Było 150 l mieszanek.

15. Skala podobieństwa Iglicy i jej modelu to $k = \frac{96m}{24cm} = \frac{9600}{24} = 400$. Stosunek objętości brył podobnych wynosi k^3 i jest to jednocześnie stosunek mas obu obiektów. Zatem stosunek mas Iglicy i jej modelu wynosi $400^3 = 4^4/m$, gdzie m to masa modelu Iglicy w tonach. Zamieniając jednostki na gramy i przekształcając wzór, dostajemy $m = \frac{44000000}{64000000} = 0,6875$ g.
16. Jeśli liczbę uczniów z tej strony, gdzie początkowo było ich mniej, oznaczyć jako x , to x powinno być najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, taką że liczbami całkowitymi są $1,35x$, czyli $27x/20$, oraz $0,45 \cdot 1,35x$, czyli $243x/400$. Takim x jest 400, zatem w apelu brało udział co najmniej $400 + 27 \cdot 400/20 = 940$ uczniów.

VI POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH
„W POGONI ZA INDEKSEM”
ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE – ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI



rok szkolny 2014/2015

17. Chodzi o 90% liczby $2(5+7) \cdot (5 \cdot 7 - (5/7 + 6))$.

Odp.: $610 \frac{34}{35}$.

18. Jeżeli telefon jest włączony, ale Agnieszka go nie używa, to w ciągu godziny zużywa się Podczas tych 9 godzin zużyło się $8 \cdot \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ baterii.

Pozostało zatem $\frac{1}{3}$ baterii co wystarczy na 8 godzin.

19. x- ilość dymiącego kwasu azotowego 99-procent

y- ilość stężonego kwasu azotowego 69,2-procentowego

$$99\%x + 69,2\%y = z\% (x+y)$$

$$x/y = 3/2$$

Po rozwiązaniu układu równań $\frac{1}{24}$ baterii, a jeżeli używa, to $\frac{1}{3}$ baterii.

otrzymujemy **z= 87,08%**

20. Oznaczmy przez a, b, c długości boków trójkąta prostokątnego.

Wówczas $a^2 + b^2 = c^2$, z treści zadania $a^2 + b^2 + c^2 = 128$ stąd $a^2 + b^2 = c^2 = 64$, więc $c=8$.

Zatem $a+b=10$, oraz $(a+b)^2=100=64+2ab$

Stąd

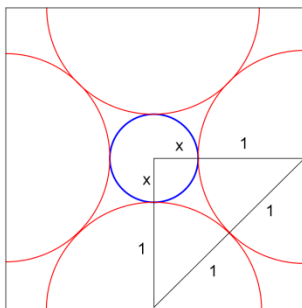
$$P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}(2ab) = \frac{1}{4}36 = 9$$

21. 12π

Kąt wewnętrzny sześciokąta foremnego ma miarę 120. Każdy z 6 łuków stanowi $\frac{1}{3}$ okręgu o promieniu 3.

22. Trzeba zauważyć, że w dowolnym trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a i b zachodzi równość $a+b=2R+2r$. Obwód takiego trójkąta jest równy $a+b+c=2r+4R=30$.

23. $\sqrt{2} - 1$

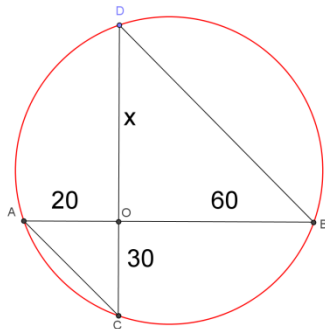


VI POWIATOWY KONKURS MATEMATYCZNY SZKÓŁ GIMNAZJALNYCH
„W POGONI ZA INDEKSEM”
ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE – ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

rok szkolny 2014/2015



24. Trójkąty AOC i BOD są podobne. Z podobieństwa trójkątów otrzymujemy, że $x=20$.



25. 25 kwadratami typu B.

Można zauważyć, że bok kwadratu B ma długość 1, a bok kwadratu A ma długość 5.

26. 36^0 , 72^0 , 108^0 , 144^0

27. -----

28. x, y, z - wymiary kartonika, $x < y < z$

$V=8xy$ $V=4xz$ $V=2yz$, mnożymy stronami otrzymujemy $V^3=64(xyz)^2$, objętość kartonika $xyz=1000$ czyli $V=400\text{cm}^3$

29. Każdy bok trójkąta jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym, trójkąt jest równoboczny $P=\frac{216\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$

30. a -długość krawędzi sześciianu ABCDEGGH, EB -przekątna ściany bocznej $EB=a\sqrt{2}$, K - środek krawędzi EH, trójkąt EKB jest prostokątny, stosujemy tw. Pitagorasa i $a=10$, czyli $V=1000\text{cm}^3$

31. a) 28

b) 360

32. -----

33. Można zauważyć, że : $m=2+n$, wtedy $mn+1=(2+n)n + 1 = 2n + n^2 + 1 = (n + 1)^2$, zatem jest kwadratem liczby naturalnej.

34. a) 0

b) 1,2,3.....99.100